

數學閒話——玩玩看頂點連方塊

在數學的小天地裏，無聊的東西可多着呢！就來說方塊吧，其實便是方格，也就是四邊形。自古以來，四邊形在幾何學中的地位趕不上三角形；然而以日常生活的用途而言，四邊形可就勝過了三角形。於是俺就來看看棋盤的格子，是否可以變出幾片方塊酥，玩一玩餅乾把戲呢？

所謂連方塊，亦稱多方塊，是一種使用格子的多元形成遊戲。其構造甚簡單，即以每個全等正方形當作方格，互不重疊，合成一體，並設法形成不同的構造。於是玩家可以組合不同的構造，形成理想或夢想的完整造型。

那麼連方塊又是怎麼個形成法呢？俺先從簡單的形式開始畫畫看吧！為了簡便，我把同樣的正方形稱為窗格，接觸而毗鄰的窗格互稱為鄰居。以正方形各頂點符合格子點的位置而接觸在一起，是為啣接。窗格及窗格所合成者為餅乾。餅乾與餅乾所黏合者為答案。

細看圖 1 的展示，由左而右的餅乾是單一方塊、雙連方塊，還有兩種三連方塊。在雙連方塊與兩種三連方塊，鄰居都以邊邊互相啣接。

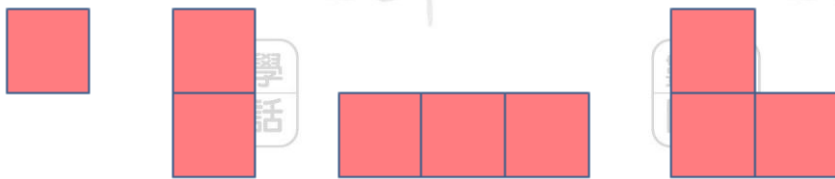


圖 1

然而窗格之互相啣接形式不僅僅限於邊邊互相啣接，如今我想考慮者為頂點互相啣接之變化情況，則構造會變得比較複雜。而所謂頂點互相啣接的方式，是指鄰居只以頂點互相啣接，且形成之內外角皆為直角，即 90 度。此處之所以須保持頂點互相啣接而形成之內外角皆為直角，即 90 度，也是為了簡化圖形構造，便利往後更多的餅乾可以黏合在一起呀！

細看圖 2 的展示，由左而右的餅乾是鄰居以頂點互相啣接之雙連方塊，還有三種鄰居以頂點互相啣接之三連方塊。

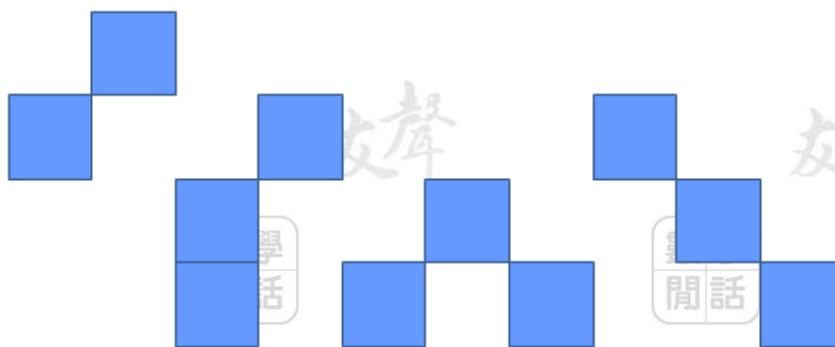


圖 2

比較圖 1 的展示與圖 2 的展示，綜合觀察，不考慮旋轉或翻轉，單一方塊很純粹，只有一種，不用辨別。雙連方塊有兩種，舊的一種是以邊邊互相啣接，新的一種是以頂點互相啣接。三連方塊共有五種。在圖 1 中的三連方塊是兩種

原始的設計，鄰居僅以邊邊互相啣接，中間擁有一條共同邊線。在圖 2 中的三連方塊有三種，都是鄰居以頂點互相啣接的三連方塊沒錯，而且是不同的構造，仍可以做分類。其中靠近右邊的兩種三連方塊，鄰居所形成內外角均為直角，即 90 度，不必利用邊邊互相啣接。靠近左邊的三連方塊，除了利用邊邊互相啣接，鄰居更以頂點互相啣接，所形成內外角均為直角，即 90 度。所以窗格跟窗格想要當鄰居，不是邊邊互相啣接，便是頂點互相啣接。

原來如此，連方塊的構造很簡單吧！是以鄰居憑藉頂點互相啣接，而形成的內外角均為直角，即 90 度，稱為頂點連方塊(vertex polyomino)。鄰居共用一條邊線者，稱為簡單連方塊(simple polyomino)。不過也有其他更花俏的構造出現，鄰居既共用一條邊線，又憑藉頂點互相啣接，那就得稱為混雜連方塊(hybrid polyomino)。

所以，在圖 2 的展示中靠近雙連方塊的那片三連方塊真的不太一樣，這樣的構造好比兩種雙連方塊的合併，須重疊其中一個窗格，如此既有邊邊互相啣接，也有頂點互相啣接，即為混雜連方塊。

為稱呼之方便，在圖 1 的展示中，由左而右的餅乾分別是太元、陽元、木元、土元。而在圖 2 的展示中，由右而左的餅乾分別是水元、火元、金元、陰元。

上述各式餅乾可以用不同的顏色塗裝。然而因為顏色太多，容易使人眼花撩亂，以下作圖我便以數字代表編碼，標示同一數字的窗格皆屬於同一片餅乾，並嘗試編組，合併成為長方形，即是答案。

細看圖 3 左邊的答案，為 15 格棋盤，包含 1 個木元、2 個金元、2 個火元。

細看圖 3 右邊的答案，為 15 格棋盤，包含火元、金元、土元、水元、木元各一個。

2	3	4	5	4	1	2	2	4	5
3	2	5	4	5	2	1	4	3	5
3	2	1	1	1	1	4	3	3	5

圖 3

細看圖 4 左邊的答案，為 15 格棋盤，包含 2 個土元、3 個水元。

細看圖 4 右邊的答案，為 15 格棋盤，包含 2 個土元、3 個木元。

2	3	4	5	5	2	2	2	5	5
1	2	3	4	5	1	3	3	3	5
1	1	2	3	4	1	1	4	4	4

圖 4

細看圖 5 左邊的答案，為 12 格棋盤，包含木元、金元、火元、土元各一個。

細看圖 5 右邊的答案，為 15 格棋盤，包含水元、土元、金元、火元、木元各一個。

1	3	2	3	2	2	1	4	5
1	2	3	4	2	1	4	3	5
1	2	4	4	1	3	3	4	5

圖 5

細看圖 6 左邊的答案，為 15 格棋盤，包含木元、水元、土元各一個與金元 2 個。

細看圖 6 右邊的答案，為 15 格棋盤，包含木元、火元、金元、土元、水元各一個。

3	3	2	5	4	2	3	3	5	4
3	2	4	4	5	3	2	5	4	4
2	1	1	1	5	2	5	1	1	1

圖 6

細看圖 7 左邊的答案，為 15 格棋盤，包含水元、金元、火元、土元、木元各一個。

細看圖 7 右邊的答案，為 15 格棋盤，包含水元、金元、火元、土元、木元各一個。

5	4	4	2	1	5	5	5	2	1
5	4	3	1	2	4	4	3	1	2
5	3	1	3	2	4	3	1	3	2

圖 7

細看圖 8 左邊的答案，為 12 格棋盤，包含土元、火元、金元、水元各一個。

細看圖 8 右邊的答案，為 12 格棋盤，包含土元、火元、金元、水元各一個。

5	4	4	3	5	4	2	2
2	5	3	4	4	5	3	2
2	2	5	3	4	3	5	3

圖 8

細看圖 9 左邊的答案，為 12 格棋盤，包含木元、土元、火元、金元各一個。
 細看圖 9 右邊的答案，為 12 格棋盤，包含木元、土元、火元、金元各一個。

1	4	4	3
1	2	3	4
1	2	2	3

3	4	4	2
4	3	2	2
3	1	1	1

圖 9

窗格啣接，黏合餅乾，彼此鄰居，皆方塊也。在此俺並沒有甚麼技巧可言，只是湊合湊合，就像接榫一般，簡單連方塊也好，混雜連方塊也好，頂點連方塊也好，反正兜在一起，可以互補有無，便形成連方塊系統 (polyomino system)。在本文中的連方塊系統，答案之輪廓都採用矩形，也就是長方形。

以上俺費了不少工夫，概述單一方塊、雙連方塊、三連方塊的變化情況。若是進一步提升到四連方塊的狀況，那可就有點複雜了。數學遊戲嘛，玩夠了再說。於是俺利用骰子為道具，繼續在桌面上玩拼拼樂吧。

細看圖 10 的展示，都是傳統的四連方塊，按其啣接形式為簡單連方塊，不考慮旋轉或翻轉，共有 5 種構造。

細看圖 11 的展示，也都是四連方塊，按其啣接形式為混雜連方塊，不考慮旋轉或翻轉，共有 12 種構造。

細看圖 12 的展示，也都是四連方塊，按其啣接形式為頂點連方塊，不考慮旋轉或翻轉，共有 5 種構造。

簡單連方塊

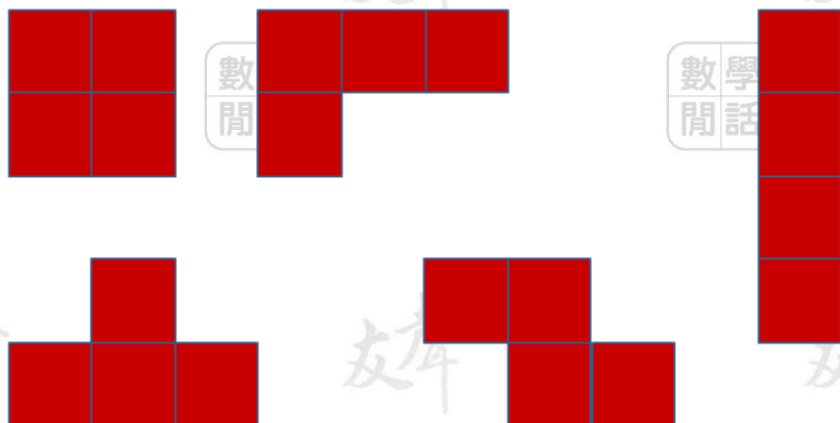


圖 10

列位看官很容易看得出來，圖 10 的餅乾與圖 12 的餅乾正好是逐個對應的，所改變的是鄰居互相啣接方向差了 45 度或 135 度。鄰居從邊邊互相啣接改變成頂點互相啣接。其實在圖 1 的展示與圖 2 的展示，也可以找到類似的對應，木元對應水元，土元對應火元。鄰居從邊邊互相啣接改變成頂點互相啣接。至於金元，並無可對應者，可視為陰元跟陽元重疊一個窗格的合體構造。

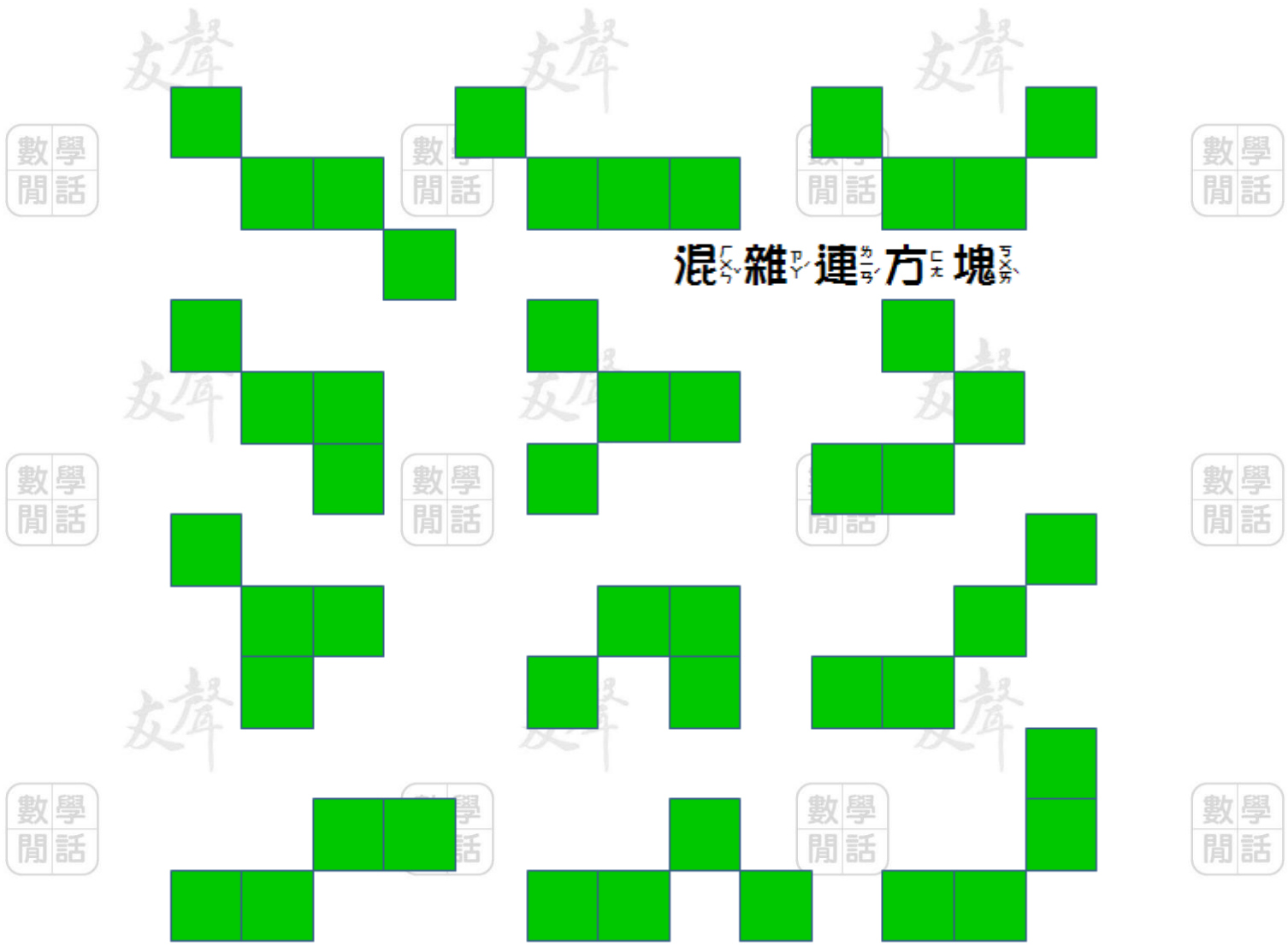


圖 11

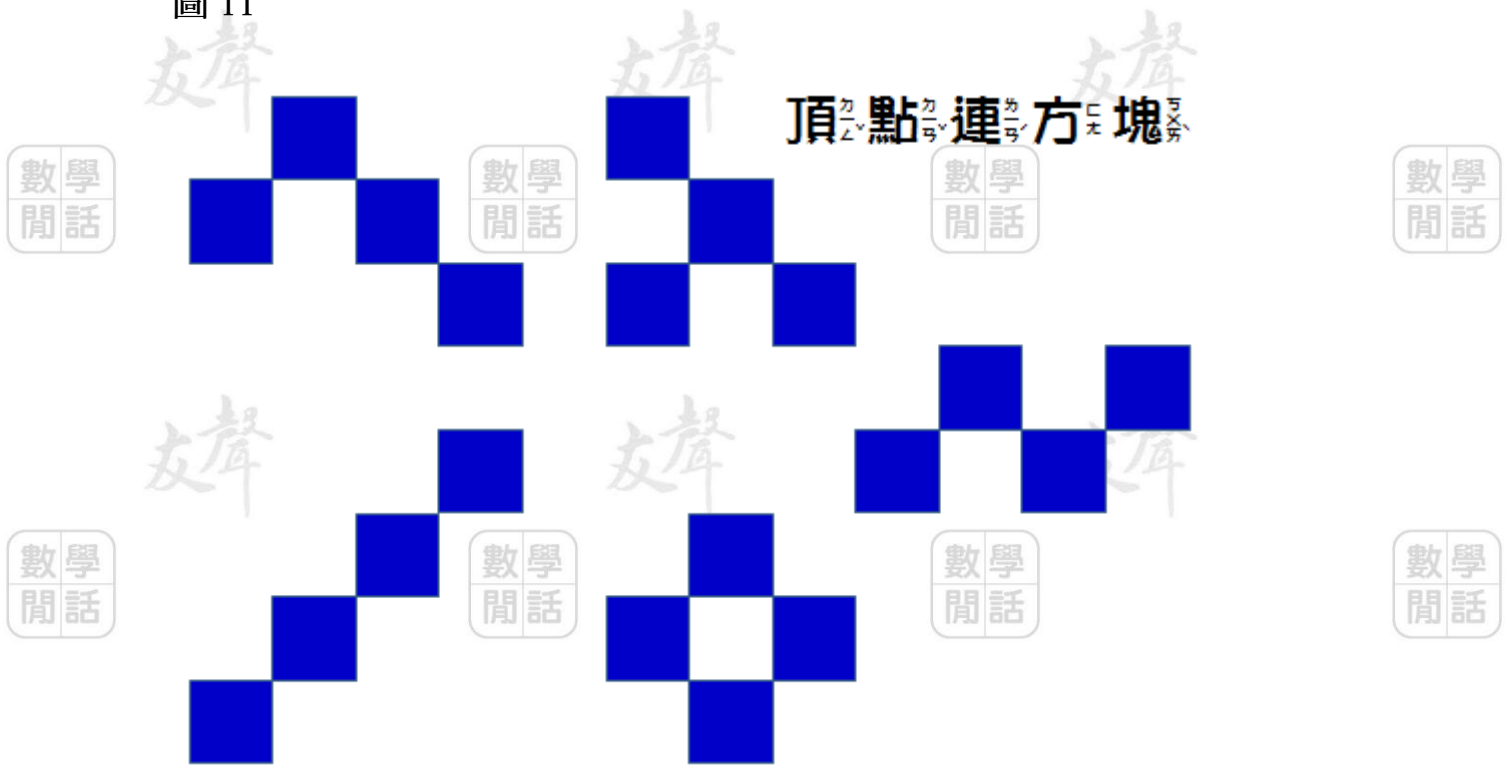


圖 12

補充說明，凡鄰居所形成內外角均為直角，即 90 度，此處相鄰各方格之頂點互相啣接，姑且稱為點心。如此來看圖 11 的展示，四連方塊之混雜連方塊還可以略做區分。第一類只有一個點心，共有六種構造。第二類擁有兩個點心，共有六種構造。

綜合計算上述簡單連方塊、頂點連方塊、混雜連方塊，單一方塊有 1 種，雙連方塊有 2 種，三連方塊有 5 種，四連方塊有 22 種，求 1、2、5、22 之和，全部就是 30 種。如果這些餅乾全部粘合在一起，會有幾個窗格呢？

可以想見，窗格數持續增加，玩家推廣到五連方塊、六連方塊、七連方塊、八連方塊、九連方塊等等，各種餅乾的構造變化還會更加複雜，限於篇幅，只好略過不提。

提到方格，以上的餅乾把戲都只是平面幾何的玩法。如果搞成三度空間的連方塊，立體化想想看，那纔更是繁瑣可畏呢！到時候方格成了立方體，而相鄰立方體之間的彼此接觸方式，可以是頂點互相啣接，也可以是稜線互相啣接，甚至於表面互相啣接。吾人只能說，想偷懶的話，這種多立方體演示的苦工只好由高手用電腦寫程式去弄清楚吧！

在春秋戰國時代，諸子百家蠶起，陰陽五行的思想盛行，陰陽的論述在於易經。蓋太極生兩儀，即陰、陽，重合為四象，即太陽、少陽、太陰、少陰。兩儀與四象合之為八卦，即乾、兌、離、震、巽、坎、艮、坤。而所謂五行一土、木、火、金、水，是怎樣推得呢？陰陽與五行又有什麼聯繫關係呢？

以動機與環境來說，古人也是使用十進位制，數字 10 的因數分解便是 2 乘以 5，陰與陽恰好代表數字 2，而數字 5 的使用，乃是因為一隻手就有五個手指，或一隻腳也有五個腳趾，於是數字 5 變成了計數單位，兩個五，便是十。古人只須好好利用數字 5，便可以表演各種元素了。

此時回頭看圖 1 的展示與圖 2 的展示，或許可以找到些許啟示。論及太元、陰元、陽元、土元、木元、火元、金元、水元，這八片餅乾並不是代表八卦，而是解釋陰陽與五行之間的聯繫關係。單一方塊是太元，代表太極；雙連方塊是陰元、陽元，代表兩儀；三連方塊共有五種，比較複雜一些，土元、木元、火元、金元、水元分別代表五行一土、木、火、金、水。以連方塊來看，五行一土、木、火、金、水，乃是陰、陽兩儀的發展，兩儀乃是太極的發揮。

老子曰：道生一，一生二，二生三，三生萬物。套以連方塊的思路，一是太極，二是陰、陽兩儀，三是五行一土、木、火、金、水，進而衍生各類物件。哎呀，見笑了！我並不想給道德經下註腳，只是胡亂猜想罷了，尚請列位看官見諒。

田銘茗寫於潛艇堡